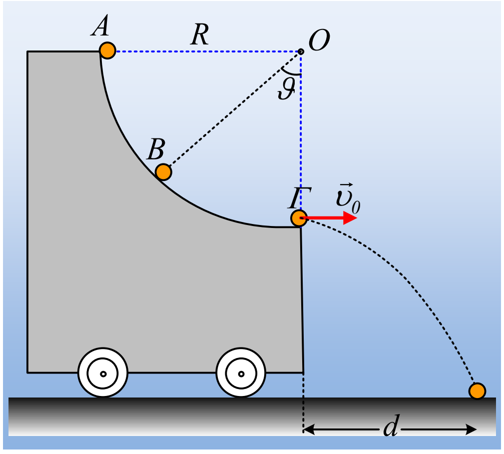
Τι αλλάζει αν αφήσουμε το αμαξίδιο;

Σε λείο οριζόντιο επίπεδο, ηρεμεί ένα αμαξίδιο μάζας M=4kg, στο οποίο η πάνω επιφάνειά του σχηματίζει τεταρτοκύκλιο ακτίνας R=0,25m, κέντρου Ο. Μια μικρή σφαίρα, αμελητέας ακτίνας, αφήνεται στο πάνω άκρο Α του τεταρτοκυκλίου να κινηθεί, ενώ συγκρατούμε ακίνητο το αμαξίδιο. Η κίνηση της σφαίρας πραγματοποιείται χωρίς τριβές. Μετά από λίγο η σφαίρα περνά από το σημείο Β, όπου η ακτίνα ΒΟ σχηματίζει γωνία θ με την κατακόρυφη, ενώ συνεχίζοντας την κίνησή της εγκαταλείπει το αμαξίδιο με οριζόντια ταχύτητα υ_0.



i) Να βρεθεί η επιτάχυνση της σφαίρας στην αρχική θέση Α και στη θέση Γ, που εγκαταλείπει το αμαξίδιο. Πόση δύναμη δέχεται η σφαίρα από το αμαξίδιο στις παραπάνω θέσεις;

ii) Να βρεθεί η δύναμη που ασκεί το αμαξίδιο στη σφαίρα στη θέση Β.

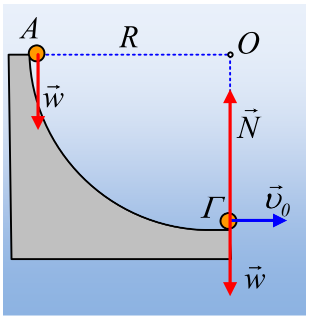
iii) Πόσο απέχει το σημείο Γ από το έδαφος, αν η σφαίρα φτάσει στο έδαφος σε απόσταση d=0,4m από το άκρο του αμαξιδίου;

iv) Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία, αλλά τώρα δεν συγκρατούμε το αμαξίδιο ακίνητο. Να εξηγείστε γιατί το αμαξίδιο θα κινηθεί και να υπολογιστεί η ταχύτητά του, τη στιγμή που η σφαίρα φτάνει στο σημείο Γ.

Δίνεται $g=10m/s^2$, ενώ ημθ=0,6 και συνθ=0,8.

Απάντηση:

i) Τη στιγμή που αφήνεται η σφαίρα στη θέση Α, η μόνη δύναμη που δέχεται είναι το βάρος της, το οποίο και θα την επιταχύνει σε κατακόρυφη διεύθυνση:



$$\Sigma F_y = m\cdot a_y \rightarrow mg = m\cdot a_y \rightarrow a_y = g = 10m/s^2.$$

Στην οριζόντια διεύθυνση: $\Sigma F_x = m\frac{\upsilon_A^2}{R} = 0$.

Αντίστοιχα στην θέση Γ: $\Sigma F_x=0$ ή $a_x=0$, ενώ $a_y = \frac{\upsilon_o^2}{R}$

$$\Sigma F_y = m\frac{\upsilon_\Gamma^2}{R} \rightarrow N - mg = m\frac{\upsilon_o^2}{R} \rightarrow$$

$$\Sigma F_y = m\frac{\upsilon_\Gamma^2}{R} \rightarrow N - mg = m\frac{\upsilon_o^2}{R} \rightarrow N = mg + m\frac{\upsilon_o^2}{R}$$

Αλλά αφού η σφαίρα κινείται χωρίς τριβές, η μηχανική ενέργεια παραμένει σταθερή και θεωρώντας μηδενική τη δυναμική ενέργεια στη θέση Γ παίρνουμε:

$$K_A+U_A=K_\Gamma+U_\Gamma \rightarrow$$

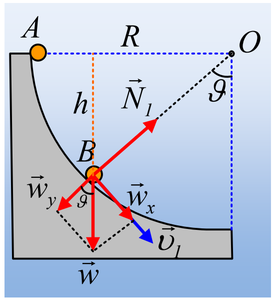
$$0+mgR=\frac{1}{2}m\upsilon_0^2 \rightarrow \upsilon_0^2=2gR \quad (1)$$

Οπότε:

$$a_\Gamma=a_y=\frac{\upsilon_o^2}{R}=\frac{2gR}{R}=2g=20m/s^2.$$

$$N=mg+m\frac{\upsilon_o^2}{R}=mg+m\frac{2gR}{R}=3mg=30N$$

ii) Εφαρμόζουμε ξανά τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας ανάμεσα στις θέσεις Α και Β, θεωρώντας τώρα μηδενική τη δυναμική ενέργεια στο Β και παίρνουμε:



$$K_A+U_A=K_B+U_B \rightarrow$$

$$0+mgh=\frac{1}{2}m\upsilon_1^2 \rightarrow \upsilon_1^2=2gh=2gR\cdot\sigma\upsilon\nu\vartheta$$

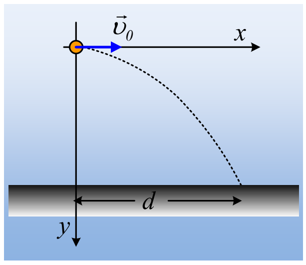
Αλλά τότε με βάση τις δυνάμεις που έχουν σχεδιαστεί στο διπλανό σχήμα, έχουμε:

$$\Sigma F_y=m\frac{\upsilon_1^2}{R} \rightarrow N_1-mg\sigma\upsilon\nu\vartheta=m\frac{\upsilon_1^2}{R} \rightarrow$$

$$N_1=mg\sigma\upsilon\nu\vartheta+m\frac{2gR\sigma\upsilon\nu\vartheta}{R}=3mg\sigma\upsilon\nu\vartheta \rightarrow$$

$$N_1=3\cdot 1\cdot 10\cdot 0{,}8N=24N$$

iii) Η σφαίρα εγκαταλείπει το αμαξίδιο στο σημείο Γ, με οριζόντια ταχύτητα υ_0 μέτρου:



$$\upsilon_0=\sqrt{2gR}=\sqrt{2\cdot 10\cdot 0{,}25}m/s=\sqrt{5}m/s$$

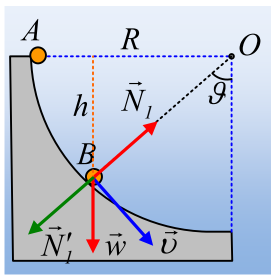
Αλλά τότε για την οριζόντια βολή που θα επακολουθήσει ισχύουν:

Άξονας x	Άξονας y
$\upsilon_x=\upsilon_o$ (1)	$\upsilon_y=gt$ (3)
$x=\upsilon_o t$ (2)	$y=\frac{1}{2}gt^2$ (4)

Με επίλυση της (2) ως προς t και αντικατάσταση στην (4) παίρνουμε (x=d):

$$y=\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{\upsilon_0}\right)^2=\frac{gd^2}{2\upsilon_0^2}=\frac{10\cdot 0{,}4^2}{2\cdot 5}m=0{,}16m$$

iv) Αν πάρουμε τη σφαίρα σε μια τυχαία θέση, τότε δέχεται από το τεταρτοκύκλιο την κάθετη αντίδραση N_1, αλλά τότε ασκεί στο αμαξίδιο την αντίδρασή της N'_1 η οριζόντια συνιστώσα της οποίας, θα επιταχύνει προς τα αριστερά το αμαξίδιο.



Κατά τη διάρκεια της κίνησης της σφαίρας πάνω στο αμαξίδιο, το σύστημα είναι μονωμένο, με αποτέλεσμα να ισχύει η Α.Δ.Ο. από όπου παίρνουμε:

$$\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ} \rightarrow$$

$$0 = mυ_1 - MV \rightarrow$$

$$υ_1 = 4V$$

Όπου $υ_1$ η τελική ταχύτητα της σφαίρας και V του αμαξιδίου.

Εξάλλου με εφαρμογή της Α.Δ.Μ.Ε. κατά τη διάρκεια της παραπάνω κίνησης παίρνουμε:

$$K_A + U_A = K_Γ + U_Γ \rightarrow$$

$$0 + mgR = \frac{1}{2} mυ_1^2 + \frac{1}{2} MV^2 \rightarrow$$

$$mgR = \frac{1}{2} m \cdot 16V^2 + \frac{1}{2} 4mV^2 \rightarrow 10V^2 = gR \rightarrow$$

$$V = \sqrt{\frac{gR}{10}} = \sqrt{\frac{10 \cdot 0,25}{10}} m/s = 0,5 m/s$$

Οπότε η σφαίρα αποκτά ταχύτητα $υ_1$=2m/s.

dmargaris@gmail.com