«Αποκαλυπτικά διαγράμματα ταχύτητας – χρόνου»

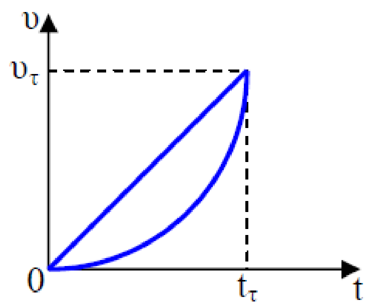
Οι πληροφορίες που συνήθως αναζητούμε από ένα διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου για την λύση ενός προβλήματος ή μιας απάντησης σε ερώτηση κινηματικής είναι:

1. Ο υπολογισμός της μετατόπισης χωρίς τη χρήση των αντίστοιχων τύπων για τα διάφορα είδη κίνησης, όπου από τον ορισμό της ταχύτητας $\vec{\upsilon} = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}$ προκύπτει ότι το μέτρο της μετατόπισης Δx του σώματος σε χρονικό διάστημα Δt, $\Delta x = \upsilon\Delta t$ μπορεί να απεικονιστεί στο διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου ως το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης «υ – t» και του άξονα των χρόνων και

2. Ο υπολογισμός της επιτάχυνσης $\vec{\alpha}$ από την κλίση της γραφικής παράστασης, αφού εξ ορισμού $\vec{\alpha} = \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t}$.

Όμως σε πολλές περιπτώσεις ερωτήσεων ή προβλημάτων η προσεκτική παρατήρηση του διαγράμματος «υ - t» μπορεί να «αποκαλύψει» πληροφορίες που συμβάλλουν αποφασιστικά στην απάντηση μιας ερώτησης ή τη λύση ενός θέματος, χωρίς αυτό να περιορίζεται απαραίτητα στον εύκολο αριθμητικά υπολογισμό (χωρίς χρήση των αντίστοιχων εξισώσεων κίνησης) των Δx και α. Ας δούμε τα επόμενα θέματα όπου η προσεκτική παρατήρηση του διαγράμματος «υ–t» οδηγεί στη λύση ή την απλοποιεί.

1ο Θέμα



Διαστημικό λεωφορείο που αρχικά ηρεμεί (υ_0=0), απογειώνεται τη χρονική στιγμή t_0=0 και κινείται ευθύγραμμα χωρίς να αλλάξει κατεύθυνση. Στη διάρκεια του ταξιδιού του καθώς καταναλώνει τα καύσιμά του γίνεται διαρκώς ελαφρύτερο με αποτέλεσμα η επιτάχυνσή του να αυξάνει διαρκώς όπως και η ταχύτητά του η οποία αποκτά μια τελική τιμή υ_τ τη χρονική στιγμή t_τ που εξαντλεί τα καύσιμά του. Κατά τον απαραίτητο τεχνικό έλεγχο πριν την εκτόξευση και προκειμένου να ελεγχθούν οι αντοχές του λεωφορείου αυτό επιταχύνεται ευθύγραμμα, χωρίς να αλλάξει κατεύθυνση με κατάλληλη σταθερή επιτάχυνση, ώστε τη χρονική στιγμή t_τ η ταχύτητά του να είναι ίση με την τελική ταχύτητα υ_τ που θα αποκτήσει κατά τη διάρκεια του ταξιδιού του.

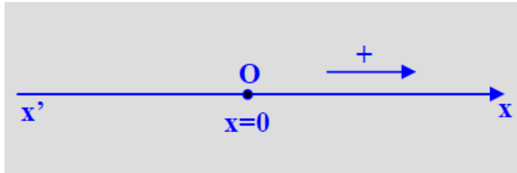
Στο διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου φαίνεται η μεταβολή της ταχύτητας του διαστημικού λεωφορείου, όταν κινείται με σταθερή επιτάχυνση και όταν κινείται με αυξανόμενη επιτάχυνση. Για τη μέση (αριθμητική) ταχύτητα υ_μ του διαστημικού λεωφορείου, όταν αυτό ταξιδεύει με αυξανόμενη επιτάχυνση, ισχύει ότι:

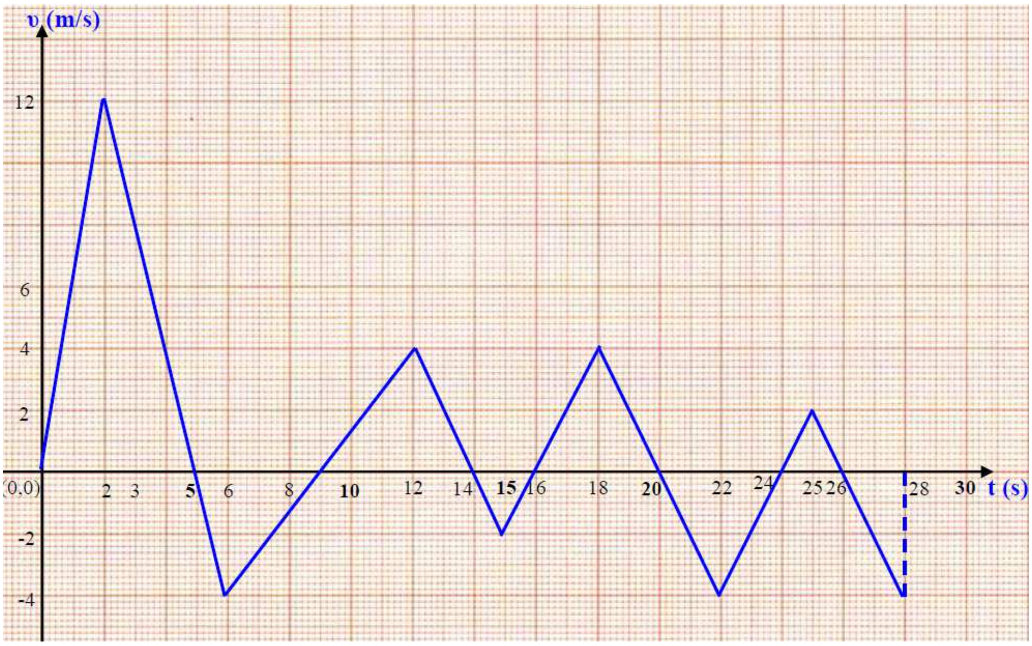
α. $\upsilon_\mu < \frac{1}{2}\upsilon_\tau$ **β.** $\upsilon_\mu = \frac{1}{2}\upsilon_\tau$ **γ.** $\upsilon_\mu > \frac{1}{2}\upsilon_\tau$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

2^o Θέμα

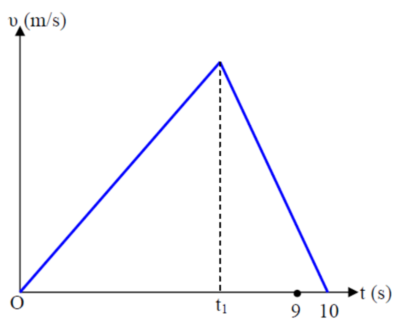
Ένα σώμα που ηρεμεί στη θέση O (x_0=0), αρχίζει να κινείται τη χρονική στιγμή t_0=0. Η κίνησή του είναι ευθύγραμμη και εξελίσσεται κατά μήκος της ευθείας $x'Ox$. Ως θετική κατεύθυνση ορίζεται η Ox. Αν η ταχύτητά του μεταβάλλεται σε συνάρτηση με το χρόνο όπως στο διάγραμμα, να προσδιοριστεί η θέση που αντιστοιχεί στη μέγιστη απομάκρυνση του σώματος από τη θέση έναρξης της κίνησής του O.





3^o Θέμα

Η ταχύτητα ενός σώματος που κινείται ευθύγραμμα σε οριζόντιο επίπεδο μεταβάλλεται με το χρόνο, όπως στο διάγραμμα. Το σώμα κινείται στη διεύθυνση $x'Ox$ και τη χρονική στιγμή t_0=0 που αρχίζει την κίνησή του βρίσκεται αριστερά του O στη θέση x_0=-8m.Το συνολικό διάστημα που διανύει το σώμα μέχρι να ακινητοποιηθεί πάλι τη χρονική στιγμή $t_{ολ}$=10s είναι $s_{ολ}$=180m. Αν το διάστημα που διάνυσε το σώμα κατά το τελευταίο δευτερόλεπτο της κίνησής του είναι s=4,5m, να υπολογιστούν:



α. Η μέγιστη τιμή της ταχύτητας του σώματος κατά τη διάρκεια της κίνησής του.

β. Η χρονική στιγμή στην οποία μεγιστοποιείται η ταχύτητα του σώματος.

γ. Οι τιμές της επιτάχυνσης του σώματος σε όλη τη διάρκεια της κίνησής του.

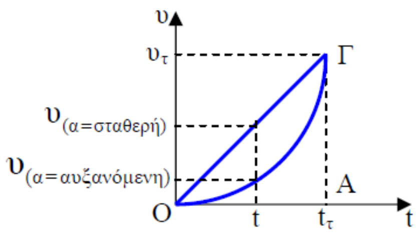
δ. Οι χρονικές στιγμές που η ταχύτητα είναι ίση με το μισό της μέγιστης τιμής της.

ε. Η μέση ταχύτητα και η μετατόπισή του σώματος στο χρονικό διάστημα που ορίζουν οι χρονικές στιγμές του προηγούμενου ερωτήματος.

στ. Να προσδιορίσετε τη θέση του σώματος τη χρονική στιγμή που μεγιστοποιείται η ταχύτητά του.

Απαντήσεις

1ο Θέμα



Από το διάγραμμα «υ – t» προκύπτουν τα ακόλουθα συμπεράσματα:

1.Το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου χωρίου (ΟΑΓ), είναι μικρότερο από το εμβαδόν του τριγώνου $O\overset{\Delta}{A}Γ$,

$$Εμβ(καμ/μουΟΑΓ) < Εμβ(O\overset{\Delta}{A}Γ).$$

Τα εμβαδά όμως αυτά αντιστοιχούν στις μετατοπίσεις του διαστημικού λεωφορείου όταν κινείται με αυξανόμενη και σταθερή επιτάχυνση αντίστοιχα επομένως, $Δx_{(α=αυξανόμενη)} < Δx_{(α=σταθερή)}$, αλλά το λεωφορείο και στις δύο περιπτώσεις κινείται ευθύγραμμα και προς την ίδια κατεύθυνση, έτσι η προηγούμενη σχέση είναι και σχέση των διαστημάτων που αυτό διανύει σε κάθε περίπτωση κίνησης άρα, $s_{(α=αυξανόμενη)} < s_{(α=σταθερή)}$.

2. Σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή t μετά την έναρξη της κίνησης, η στιγμιαία ταχύτητα της κίνησης με σταθερή επιτάχυνση είναι μεγαλύτερη από αυτήν της κίνησης με αυξανόμενη επιτάχυνση.

Το καθένα από τα δύο συμπεράσματα μπορεί να οδηγήσει στη σύγκριση των μέσων ταχυτήτων των δύο κινήσεων.

Από τον ορισμό της μέσης ταχύτητας και με τη βοήθεια του πρώτου συμπεράσματος προκύπτει:

$$s_{(α=αυξανόμενη)} < s_{(α=σταθερή)} \Rightarrow \frac{s_{(α=αυξανόμενη)}}{t_τ} < \frac{s_{(α=σταθερή)}}{t_τ} \Rightarrow υ_{μ(α=αυξανόμενη)} < υ_{μ(α=σταθερή)}. \quad \textbf{(1)}$$

Από το δεύτερο συμπέρασμα καταλήγουμε στην ίδια σχέση για τις μέσες ταχύτητες στις δύο κινήσεις, αφού σε όλη τη διάρκειά τους ισχύει $υ_{t_{(α=αυξανόμενη)}} < υ_{t_{(α=σταθερή)}}$.Επομένως η μέση ταχύτητα, όταν η επιτάχυνση είναι σταθερή, θα είναι μεγαλύτερη από τη μέση επιτάχυνση, όταν η επιτάχυνση αυξάνεται , αφού η πρώτη θα προκύπτει από διαρκώς μεγαλύτερες στιγμιαίες ταχύτητες απ’ ότι η δεύτερη.

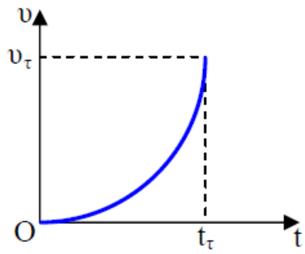
Η αναζήτηση της μέσης ταχύτητας σε μια κίνηση όπου δεν είναι γνωστές οι εξισώσεις της κίνησης και της ταχύτητας είναι ένα θέμα «εκτός διδακτέας ύλης».Η απαίτηση όμως, να συγκριθεί η μέση ταχύτητα στη «άγνωστη κίνηση» με την τελική τιμή ταχύτητας, η οποία είναι ίδια και στην περίπτωση της «γνωστής κίνησης», μας αναγκάζει να θυμηθούμε μια διαδικασία που έρχεται από πολύ παλαιά και σύμφωνα με την οποία «προσπαθούμε να απαντήσουμε σε κάτι που μας είναι άγνωστο με βάση τις γνώσεις μας σε κάτι που μας είναι ήδη γνωστό».

Πιο συγκεκριμένα, στην ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα υ_0 και τελική ταχύτητα υ_τ είναι γνωστό ότι η μέση ταχύτητα υ_μ δίνεται από τη σχέση : $\upsilon_\mu = \dfrac{\upsilon_\tau + \upsilon_0}{2}$ από την οποία για την περίπτωση που μελετάμε, όπου $\upsilon_0 = 0$, έχουμε $\upsilon_{\mu(\alpha=\sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\eta})} = \dfrac{\upsilon_\tau}{2}$. **(2)**

$$\text{Από } \mathbf{(1)} \overset{\mathbf{(2)}}{\Rightarrow} \upsilon_{\mu(\alpha=\alpha\upsilon\xi\alpha\nu\acute{o}\mu\varepsilon\nu\eta)} < \frac{\upsilon_\tau}{2} \Rightarrow \upsilon_\mu < \frac{1}{2}\upsilon_\tau .$$

Επιλέγουμε το **α.**

Σχόλιο 1



Η χρησιμότητα της διαδικασίας όπου η απάντηση σ' ένα ερώτημα που αφορά μια «άγνωστη κίνηση» δίνεται με βάση τις γνώσεις μας για μια «γνωστή κίνηση» γίνεται πιο εμφανής αν το ερώτημα διατυπωθεί ως εξής:

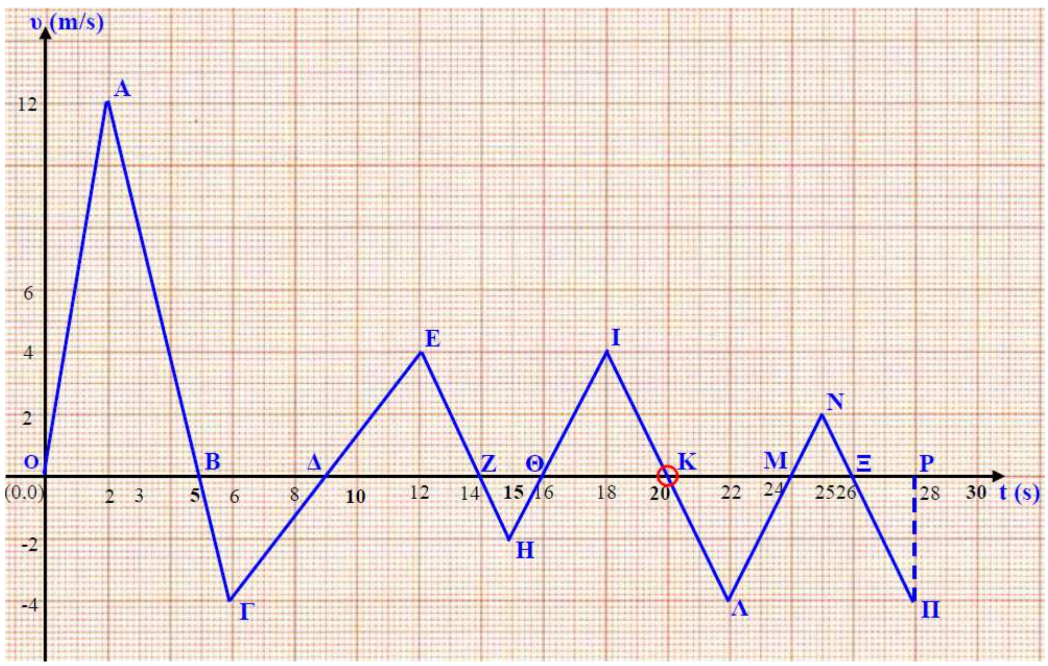
Διαστημικό λεωφορείο που αρχικά ηρεμεί (υ_0=0), απογειώνεται τη χρονική στιγμή t_0=0 και κινείται ευθύγραμμα. Στη διάρκεια του ταξιδιού του καθώς καταναλώνει τα καύσιμα του γίνεται διαρκώς ελαφρύτερο με αποτέλεσμα η επιτάχυνσή του να αυξάνει διαρκώς μέχρι τη χρονική στιγμή t_τ που εξαντλεί τα καύσιμά του και αποκτά την τελική ταχύτητά του υ_τ.

Η μεταβολή της ταχύτητας του λεωφορείου σε συνάρτηση με το χρόνο φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα. Για τη μέση (αριθμητική) ταχύτητα υ_μ του διαστημικού λεωφορείου, ισχύει ότι:

$$\textbf{α. } \upsilon_\mu < \frac{1}{2}\upsilon_\tau \qquad \textbf{β. } \upsilon_\mu = \frac{1}{2}\upsilon_\tau \qquad \textbf{γ. } \upsilon_\mu > \frac{1}{2}\upsilon_\tau$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

2^{o} Θέμα



Η σκέψη να βρεθούν οι εξισώσεις κίνησης στα διάφορα χρονικά διαστήματα με βάση τα αριθμητικά δεδομένα που δίνονται στο διάγραμμα και στη συνέχεια να προσδιοριστούν οι μετατοπίσεις και οι θέσεις του σώματος προκειμένου να προσδιοριστεί η πιο απομακρυσμένη από την αρχή Ο θέση που αυτό θα βρεθεί είναι σωστή, αλλά μάλλον αποθαρρυντική καθώς το διάγραμμα δείχνει 8 διαφορετικές κινήσεις και απαιτούνται πολλοί αριθμητικοί υπολογισμοί.

Είναι γνωστό ότι στο διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου το εμβαδόν που οριοθετείται από τη γραφική παράσταση και τον άξονα των χρόνων αντιστοιχεί στη μετατόπιση του σώματος, έτσι ο υπολογισμός της μετατόπισης γίνεται εύκολα με υπολογισμό του αντίστοιχου εμβαδού˙ στην περίπτωση μάλιστα που μας απασχολεί εδώ, τα αριθμητικά δεδομένα που υπάρχουν στο διάγραμμα, επαρκούν για τον υπολογισμό των μετατοπίσεων.

Η προσεκτική παρατήρηση του διαγράμματος δίνει τις επόμενες πληροφορίες:

1.Το άθροισμα των «θετικών εμβαδών» που αντιστοιχεί σε μετατοπίσεις προς τη θετική κατεύθυνση είναι κατ' απόλυτη τιμή μεγαλύτερο από το άθροισμα των «αρνητικών εμβαδών» που αντιστοιχεί σε μετατοπίσεις προς την αρνητική κατεύθυνση. Επειδή δίνεται ότι η κίνηση του σώματος αρχίζει από τη θέση Ο ($x=0$), η προηγούμενη παρατήρηση οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η κίνηση του σώματος εξελίσσεται μόνο σε θέσεις θετικής απομάκρυνσης ($x > 0$). Άρα και η ζητούμενη θέση θα βρίσκεται δεξιά της θέσης Ο.

2.Τα «θετικά εμβαδά» εναλλάσσονται με τα «αρνητικά», δηλαδή μετά από κάθε μετατόπιση προς τη θετική κατεύθυνση ακολουθεί μια μετατόπιση προς την αρνητική κατεύθυνση και μέχρι τη χρονική στιγμή t=20s κάθε «αρνητικό εμβαδόν» είναι κατ' απόλυτο τιμή μικρότερο από το «θετικό εμβαδόν» που προηγήθηκε, στη συνέχεια η σχέση αυτή αντιστρέφεται και τα «αρνητικά εμβαδά που ακολουθούν» είναι κατ' απόλυτο τιμή μεγαλύτερα από το «θετικό εμβαδόν» που παρεμβάλλεται. Επειδή κάθε «αρνητικό εμβαδόν» εκφράζει μετατόπιση προς την αρνητική κατεύθυνση, δηλαδή δηλώνει επιστροφή του σώματος προς τη θέση Ο, συμπεραίνουμε ότι αυτό θα βρεθεί στη θέση μέγιστης απομάκρυνσής του από τη θέση Ο τη χρονική στιγμή t=20s. Άρα για τον υπολογισμό της θέσης μέγιστης απομάκρυνσης οι υπολογισμοί των εμβαδών περιορίζονται μέχρι τη χρονική στιγμή t=20s.

Από το διάγραμμα «υ- t» έχουμε :

$$\Delta x_{t=0s\to t=20s} = \text{Εμβ}_{(OAB)} + \text{Εμβ}_{(ΒΓΔ)} + \text{Εμβ}_{(ΔΕΖ)} + \text{Εμβ}_{(ΖΗΘ)} + \text{Εμβ}_{(ΘΙΚ)} \Rightarrow$$

$$\Delta x_{t=0s\to t=20s} = \frac{1}{2}(5-0)\cdot 12 + \frac{1}{2}(9-5)\cdot(-4) + \frac{1}{2}(14-9)\cdot(4) + \frac{1}{2}(16-14)\cdot(-2) + \frac{1}{2}(20-16)\cdot(4) \Rightarrow$$

$$\Delta x_{t=0s\to t=20s} = 30 - 8 + 10 - 2 + 8 \Rightarrow \Delta x_{t=0s\to t=20s} = +38m \Rightarrow x_{max} - 0 = 38 \Rightarrow x_{max} = +38m\,.$$

Σχόλιο 2

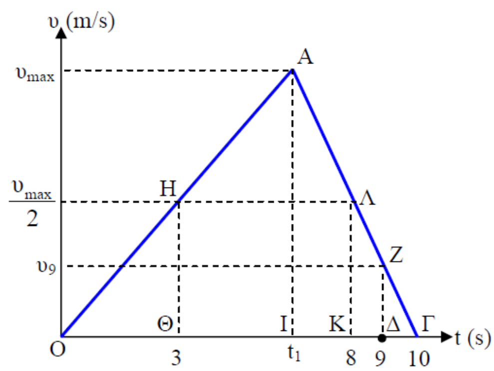
Ένας διαφορετικός τρόπος προσέγγισης της λύσης θα ήταν να βρεθούν οι εξισώσεις της ταχύτητας στις διάφορες κινήσεις οι οποίες είναι:

$\upsilon = 6t$	$0s \le t \le 2s$
$\upsilon = 20 - 4t$	$2s \le t \le 6s$
$\upsilon = -12 + \frac{4}{3}t$	$6s \le t \le 12s$
$\upsilon = 28 - 2t$	$12s \le t \le 15s$
$\upsilon = -32 + 2t$	$15s \le t \le 18s$
$\upsilon = 40 - 2t$	$18s \le t \le 22s$
$\upsilon = -48 + 2t$	$22s \le t \le 25s$
$\upsilon = 52 - 2t$	$25s \le t \le 28s$

και στη συνέχεια από τις εξισώσεις των μετατοπίσεων να υπολογίζεται κάθε φορά η τελική θέση, ώστε τελικά να προσδιοριστεί η θέση που αντιστοιχεί στη μέγιστη απομάκρυνση από τη θέση Ο. Μάλλον η περιγραφή της διαδικασίας αυτής λειτουργεί προπαγανδιστικά υπέρ του προτεινόμενου τρόπου λύσης.

3ο Θέμα

Η προσεκτική παρατήρηση του διαγράμματος ταχύτητας – χρόνου μας δίνει τις ακόλουθες πληροφορίες:



1. Η ταχύτητα του σώματος μεγιστοποιείται τη χρονική στιγμή t_1 που τελειώνει η ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση και αρχίζει μια ομαλά επιβραδυνόμενη.

2. Σε όλη τη διάρκεια της κίνησης του σώματος οι αριθμητικές τιμές της ταχύτητας είναι θετικές, επομένως το σώμα κινείται διαρκώς προς τη θετική κατεύθυνση, χωρίς να αλλάζει φορά κίνησης, έτσι το μέτρο της συνολικής μετατόπισής του ισούται με το ολικό διάστημα που διάνυσε κατά τη διάρκεια της κίνησής του και μπορεί να αντιστοιχιστεί με το εμβαδόν που περικλείεται από τη γραφική παράσταση «υ - t» και τον άξονα των χρόνων.

3. Το σώμα κατά το τελευταίο δευτερόλεπτο της κίνησής του (9s – 10s) επιβραδύνεται ομαλά καθώς από το διάγραμμα προκύπτει ότι η ταχύτητα του σώματος ελαττώνεται ήδη από τη χρονική στιγμή t_1 που μεγιστοποιήθηκε.

α. Το ολικό διάστημα $s_{ολ}$, όπως εξηγήσαμε, αντιστοιχεί στο εμβαδόν του τριγώνου $\overset{\Delta}{OA\Gamma}$:

$$s_{ολ} = Εμβ(Ο\overset{\Delta}{Α}Γ) = \frac{1}{2}υ_{max} \cdot t_{ολ} \Rightarrow 180 = \frac{1}{2}υ_{max} \cdot 10 \Rightarrow υ_{max} = 36m/s \quad \mathbf{(1)}$$

β. Το διάστημα s που διανύθηκε από το σώμα στο τελευταίο δευτερόλεπτο της κίνησής του είναι:

$$s = Εμβ(Ζ\overset{\Delta}{Δ}Γ) = \frac{1}{2}υ_9 \cdot (10-9) \Rightarrow 4,5 = \frac{1}{2}υ_9 \Rightarrow υ_9 = 9m/s \quad \mathbf{(2)}$$

Από τον ορισμό της επιτάχυνσης και για το χρονικό διάστημα t_1-10s που το σώμα επιβραδύνεται έχουμε:

$$α_2 = \frac{0 - υ_{max}}{t_{ολ} - t_1} = \frac{υ_9 - υ_{max}}{9 - t_1} \overset{(1)}{\underset{(2)}{\Rightarrow}} -\frac{36}{10 - t_1} = \frac{9-36}{9-t_1} \Rightarrow \frac{4}{10-t_1} = \frac{3}{9-t_1} \Rightarrow t_1 = 6s \quad \mathbf{(3)}$$

γ. Από τον ορισμό της επιτάχυνσης για το χρονικό διάστημα $0 - t_1$, έχουμε:

$$α_1 = \frac{υ_{max} - 0}{t_1 - 0} = \frac{υ_{max}}{t_1} \overset{(1)}{\underset{(3)}{\Rightarrow}} α_1 = \frac{36}{6} = 6m/s^2 \quad \mathbf{(4)}.$$

Αντίστοιχα η επιβράδυνση $α_2$ (αρνητική επιτάχυνση) είναι:

$$α_2 = \frac{0 - υ_{max}}{t_{ολ} - t_1} = -\frac{υ_{max}}{10 - t_1} \overset{(1)}{\underset{(3)}{\Rightarrow}} α_2 = -9m/s^2 \quad \mathbf{(5)}$$

δ. Οι εξισώσεις της ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο είναι:

$υ = 6t$ (S.I) **(6)** με $0 \le t \le 6s$ και υ=α+βt με $6s \le t \le 10s$ με αριθμητική αντικατάσταση των τιμών : υ=36 m/s όταν t=6s και υ=0 m/s όταν t=10s παίρνουμε $υ=90-9t$ **(7)** με $6s \le t \le 10s$

Με αντικατάσταση της τιμής υ=$\frac{υ_{max}}{2} = 18m/s^2$ στις **(6)** και **(7)** οι ζητούμενες χρονικές στιγμές αντίστοιχα είναι t=3s και t=8s.

Σχόλιο 3

Οι ζητούμενες χρονικές στιγμές μπορούν να προκύψουν πάλι από το διάγραμμα «υ-t» γεωμετρικά με εφαρμογή κριτηρίου ομοιότητας ορθογωνίων τριγώνων ή εφαρμογή του θεωρήματος Θαλή.

ε. Η μέση ταχύτητα του σώματος στο χρονικό διάστημα 3s − 8s είναι: $υ_μ = \frac{s_{3\to8}}{\Delta t}$ **(8)**

Το διάστημα $s_{3\to8}$ που διανύει το σώμα μεταξύ των χρονικών στιγμών 3s και 8s είναι:

$$s_{3\to8} = s_{ολ} - s_{0\to3} - s_{8\to10} \to$$

$$s_{3\to8} = Εμβ(Ο\overset{\Delta}{Α}Γ) - Εμβ(Ο\overset{\Delta}{Θ}Η) - Εμβ(Λ\overset{\Delta}{Κ}Γ) \Rightarrow s_{3\to8} = 180 - \frac{1}{2}3\cdot18 - \frac{1}{2}(10-8)\cdot18$$

$$\Rightarrow s_{3\to8} = 135m \quad \mathbf{(9)}$$

$$\text{Από} \underset{(9)}{\overset{(8)}{\Rightarrow}} \upsilon_\mu = \frac{135}{8-3} = 27\text{m}/\text{s}.$$

Στο χρονικό διάστημα 3s − 8s, όπως και σ' όλη τη διάρκεια της κίνησης, η κατεύθυνση της κίνησης δεν αλλάζει άρα, $\Delta x_{3\to 8} = s_{3\to 8} = 135\text{m}/\text{s}$.

στ. Η μετατόπιση του σώματος μέχρι τη χρονική στιγμή t_1=6s που μεγιστοποιείται η ταχύτητά του είναι:

$$\Delta x_{0\to 6} = \text{Εμβ}(\text{O}\overset{\Delta}{\text{I}}\text{A}) = \frac{1}{2} 6 \cdot 36 = 108\text{m} \Rightarrow x_6 - x_0 = 108\text{m} \Rightarrow x_6 - (-8\text{m}) = 108\text{m} \Rightarrow x_6 = 100\text{m}.$$

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Ξ. Στεργιάδης